5.1 Lenguajes Libres de Contexto

José de Jesús Lavalle Martínez

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias de la Computación
Lenguajes Formales y Autómatas CCOS 014

Contenido

$L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$

Gramática Lineal Derecha

$$S \to A|\lambda,$$
$$A \to aA|B,$$
$$B \to bB|\lambda.$$

$L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$

Gramática Lineal Derecha

$$\begin{aligned} S &\to A|\lambda, \\ A &\to aA|B, \\ B &\to bB|\lambda. \end{aligned}$$

Gramática Lineal Izquierda

$$\begin{aligned} S &\to B|\lambda, \\ B &\to Bb|A, \\ A &\to Aa|\lambda. \end{aligned}$$

Gramática Libre de Contexto

$$S \to aSb|\lambda.$$

Definición de Gramática Libre de Contexto

Definición 1

Una gramática $G = (V, T, S, P)$ se dice que es **libre de contexto** si todas las producciones en P tienen la forma

$$A \to x,$$

donde $A \in V$ y $x \in (V \cup T)^*$.

Se dice que un lenguaje L es libre de contexto si y sólo si existe una gramática libre de contexto G tal que $L = L(G)$.

Ejemplo 2

La gramática $G = (\{S\}, \{a, b\}, S, P)$ con producciones

$$S \to aSa,$$
$$S \to bSb,$$
$$S \to \lambda,$$

es libre de contexto.

Ejemplos I

Ejemplo 2

La gramática $G = (\{S\}, \{a, b\}, S, P)$ con producciones

$$S \to aSa,$$
$$S \to bSb,$$
$$S \to \lambda,$$

es libre de contexto. Una derivación en la gramática es

$$S \Rightarrow aSa \Rightarrow aaSaa \Rightarrow aabSbaa \Rightarrow aabbaa$$

Ejemplos I

Ejemplo 2

La gramática $G = (\{S\}, \{a, b\}, S, P)$ con producciones

$$S \to aSa,$$
$$S \to bSb,$$
$$S \to \lambda,$$

es libre de contexto. Una derivación en la gramática es

$$S \Rightarrow aSa \Rightarrow aaSaa \Rightarrow aabSbaa \Rightarrow aabbaa$$

El lenguaje que genera es

$$L(G) = \{ww^R : w \in \{a, b\}^*\},$$

el cual es libre de contexto y lineal (del lado derecho de la producción a lo más aparece una variable).

Ejemplos II

Ejemplo 3

Considere la gramática con producciones

$$S \to aSb|SS|\lambda.$$

Ejemplos II

Ejemplo 3

Considere la gramática con producciones

$$S \to aSb|SS|\lambda.$$

$$S \Rightarrow SS \Rightarrow aSbS \Rightarrow abS \Rightarrow abaSb \Rightarrow abaaSbb \Rightarrow abaabb,$$

Ejemplos II

Ejemplo 3

Considere la gramática con producciones

$$S \rightarrow aSb|SS|\lambda.$$

$$S \Rightarrow SS \Rightarrow aSbS \Rightarrow abS \Rightarrow abaSb \Rightarrow abaaSbb \Rightarrow abaabb,$$

$$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aSSb \Rightarrow aaSbSb \Rightarrow aabSb \Rightarrow aabaSbb \Rightarrow aababb,$$

Ejemplos II

Ejemplo 3

Considere la gramática con producciones

$$S \rightarrow aSb|SS|\lambda.$$

$$S \Rightarrow SS \Rightarrow aSbS \Rightarrow abS \Rightarrow abaSb \Rightarrow abaaSbb \Rightarrow abaabb,$$

$$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aSSb \Rightarrow aaSbSb \Rightarrow aabSb \Rightarrow aabaSbb \Rightarrow aababb,$$

$$S \Rightarrow SS \Rightarrow SSS \Rightarrow aSbSS \Rightarrow abSS \Rightarrow abaSbS \Rightarrow$$
$$ababS \Rightarrow ababaSb \Rightarrow ababab.$$

Ejemplos II

Ejemplo 3

Considere la gramática con producciones

$$S \to aSb|SS|\lambda.$$

$$S \Rightarrow SS \Rightarrow aSbS \Rightarrow abS \Rightarrow abaSb \Rightarrow abaaSbb \Rightarrow abaabb,$$

$$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aSSb \Rightarrow aaSbSb \Rightarrow aabSb \Rightarrow aabaSbb \Rightarrow aababb,$$

$$S \Rightarrow SS \Rightarrow SSS \Rightarrow aSbSS \Rightarrow abSS \Rightarrow abaSbS \Rightarrow$$
$$ababS \Rightarrow ababaSb \Rightarrow ababab.$$

$$L = \{w \in \{a,b\}^*, n_a(w) = n_b(w)\} \text{ y } n_a(v) \geq n_b(v), \}$$

donde v es cualquier prefijo de w.

Ejemplo de derivaciones más izquierda y más derecha I

Ejemplo 4

Considere la gramática $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, S, P)$ con producciones

$$S \to AB, \tag{1}$$
$$A \to aaA, \tag{2}$$
$$A \to \lambda, \tag{3}$$
$$B \to Bb, \tag{4}$$
$$B \to \lambda, \tag{5}$$

esta gramática genera el lenguaje $L(G) = \{a^{2n}b^m : n \geq 0, m \geq 0\}$.

Derivaciones más izquierda y más derecha II

Considere las siguientes derivaciones

$$S \overset{(1)}{\Rightarrow} AB \overset{(2)}{\Rightarrow} aaAB \overset{(3)}{\Rightarrow} aaB \overset{(4)}{\Rightarrow} aaBb \overset{(5)}{\Rightarrow} aab$$

y

$$S \overset{(1)}{\Rightarrow} AB \overset{(4)}{\Rightarrow} ABb \overset{(2)}{\Rightarrow} aaABb \overset{(5)}{\Rightarrow} aaAb \overset{(3)}{\Rightarrow} aab.$$

Derivaciones más izquierda y más derecha II

Considere las siguientes derivaciones

$$S \overset{(1)}{\Rightarrow} AB \overset{(2)}{\Rightarrow} aaAB \overset{(3)}{\Rightarrow} aaB \overset{(4)}{\Rightarrow} aaBb \overset{(5)}{\Rightarrow} aab$$

y

$$S \overset{(1)}{\Rightarrow} AB \overset{(4)}{\Rightarrow} ABb \overset{(2)}{\Rightarrow} aaABb \overset{(5)}{\Rightarrow} aaAb \overset{(3)}{\Rightarrow} aab.$$

Ambas derivaciones producen la misma palabra y usan las mismas producciones, aunque en diferente orden.

Definición de derivaciones más izquierda y más derecha

Definición 5

Una derivación se dice que es **más izquierda** si en cada paso es remplazada la variable más izquierda de la forma sentencial. Si en cada paso la variable más derecha es reemplazada le llamamos derivación **más derecha**.

Ejemplo de derivaciones más izquierda y más derecha

Ejemplo 6

Considere la gramática con producciones

$$S \to aAB,$$
$$A \to bBb,$$
$$B \to A|\lambda,$$

Ejemplo de derivaciones más izquierda y más derecha

Ejemplo 6

Considere la gramática con producciones

$$S \to aAB,$$
$$A \to bBb,$$
$$B \to A|\lambda,$$

Entonces

$$S \Rightarrow aAB \Rightarrow abBbB \Rightarrow abAbB \Rightarrow abbBbbB \Rightarrow abbbbB \Rightarrow abbbb$$

es una derivación más izquierda de la palabra $abbbb$.

Ejemplo de derivaciones más izquierda y más derecha

Ejemplo 6

Considere la gramática con producciones

$$S \to aAB,$$
$$A \to bBb,$$
$$B \to A|\lambda,$$

Entonces

$$S \Rightarrow aAB \Rightarrow abBbB \Rightarrow abAbB \Rightarrow abbBbbB \Rightarrow abbbbB \Rightarrow abbbb$$

es una derivación más izquierda de la palabra $abbbb$. Una derivación más derecha de la misma palabra es

$$S \Rightarrow aAB \Rightarrow aA \Rightarrow abBb \Rightarrow abAb \Rightarrow abbBbb \Rightarrow abbbb.$$

Árboles de derivación

Los árboles de derivación

- muestran una derivación independientemente del orden en el que se usaron las producciones.

Árboles de derivación

Los árboles de derivación

- muestran una derivación independientemente del orden en el que se usaron las producciones.
- son árboles ordenados cuyos nodos son etiquetados con el lado izquierdo de una producción, los hijos de un nodo son etiquetados con los símbolos del lado derecho de la producción, un hijo por cada símbolo.

Árboles de derivación

Los árboles de derivación

- muestran una derivación independientemente del orden en el que se usaron las producciones.
- son árboles ordenados cuyos nodos son etiquetados con el lado izquierdo de una producción, los hijos de un nodo son etiquetados con los símbolos del lado derecho de la producción, un hijo por cada símbolo.
- tienen la raíz etiquetada con el símbolo inicial.

Árboles de derivación

Los árboles de derivación

- muestran una derivación independientemente del orden en el que se usaron las producciones.
- son árboles ordenados cuyos nodos son etiquetados con el lado izquierdo de una producción, los hijos de un nodo son etiquetados con los símbolos del lado derecho de la producción, un hijo por cada símbolo.
- tienen la raíz etiquetada con el símbolo inicial.
- tienen hojas etiquetadas con símbolos en $T \cup \{\lambda\}$.

Árboles de derivación

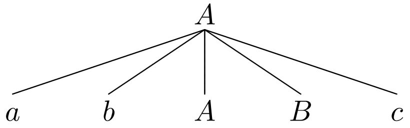
Los árboles de derivación

- muestran una derivación independientemente del orden en el que se usaron las producciones.
- son árboles ordenados cuyos nodos son etiquetados con el lado izquierdo de una producción, los hijos de un nodo son etiquetados con los símbolos del lado derecho de la producción, un hijo por cada símbolo.
- tienen la raíz etiquetada con el símbolo inicial.
- tienen hojas etiquetadas con símbolos en $T \cup \{\lambda\}$.

La producción

$$A \to abABc,$$

tiene el siguiente árbol de derivación



Definición de árbol de derivación I

Definición 7

Sea $G = (V, T, S, P)$ una gramática libre de contexto. Un árbol ordenado es un árbol de derivación de G si y sólo si tiene las siguientes propiedades.

Definición de árbol de derivación I

Definición 7

Sea $G = (V, T, S, P)$ una gramática libre de contexto. Un árbol ordenado es un árbol de derivación de G si y sólo si tiene las siguientes propiedades.

Definición de árbol de derivación I

Definición 7

Sea $G = (V, T, S, P)$ una gramática libre de contexto. Un árbol ordenado es un árbol de derivación de G si y sólo si tiene las siguientes propiedades.

1. La raíz tiene etiqueta S.

Definición de árbol de derivación I

Definición 7

Sea $G = (V, T, S, P)$ una gramática libre de contexto. Un árbol ordenado es un árbol de derivación de G si y sólo si tiene las siguientes propiedades.

1. La raíz tiene etiqueta S.
2. Cada hoja tiene una etiqueta en $T \cup \{\lambda\}$.

Definición de árbol de derivación I

Definición 7

Sea $G = (V, T, S, P)$ una gramática libre de contexto. Un árbol ordenado es un árbol de derivación de G si y sólo si tiene las siguientes propiedades.

1. La raíz tiene etiqueta S.
2. Cada hoja tiene una etiqueta en $T \cup \{\lambda\}$.
3. Cada vértice interior tiene una etiqueta en V.

Definición de árbol de derivación I

Definición 7

Sea $G = (V, T, S, P)$ una gramática libre de contexto. Un árbol ordenado es un árbol de derivación de G si y sólo si tiene las siguientes propiedades.

1. La raíz tiene etiqueta S.
2. Cada hoja tiene una etiqueta en $T \cup \{\lambda\}$.
3. Cada vértice interior tiene una etiqueta en V.
4. Si un vértice tiene una etiqueta $A \in V$ y sus hijos están etiquetados (de izquierda a derecha) $a_1, a_2, \cdots, a_n$, entonces P debe contener una producción de la forma

$$A \to a_1, a_2, \cdots, a_n.$$

Definición 7

Sea $G = (V, T, S, P)$ una gramática libre de contexto. Un árbol ordenado es un árbol de derivación de G si y sólo si tiene las siguientes propiedades.

1. La raíz tiene etiqueta S.
2. Cada hoja tiene una etiqueta en $T \cup \{\lambda\}$.
3. Cada vértice interior tiene una etiqueta en V.
4. Si un vértice tiene una etiqueta $A \in V$ y sus hijos están etiquetados (de izquierda a derecha) $a_1, a_2, \cdots, a_n$, entonces P debe contener una producción de la forma
$$A \rightarrow a_1, a_2, \cdots, a_n.$$
5. Una hoja con etiqueta λ no puede tener hermanos, es decir, un vértice con un hijo etiquetado λ no puede tener otro hijo.

Definición de árbol de derivación II

A un árbol que tenga las propiedades 3, 4 y 5, que no necesariamente cumpla la propiedad 1 y donde la propiedad 2 se reemplaza por

2a. Toda hoja tiene una etiqueta en $V \cup T \cup \{\lambda\}$,

se le llama **árbol de derivación parcial**.

El **producto** de un árbol es la cadena formada por las etiquetas de las hojas del árbol en el orden que se van encontrando cuando se hace un recorrido primero en profundidad, siempre tomando la rama más izquierda que no se ha explorado.

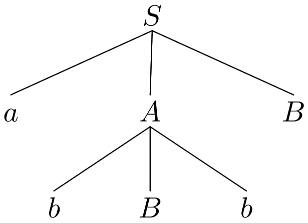
Ejemplo árbol de derivación I

Ejemplo 8

Considere la gramática con producciones

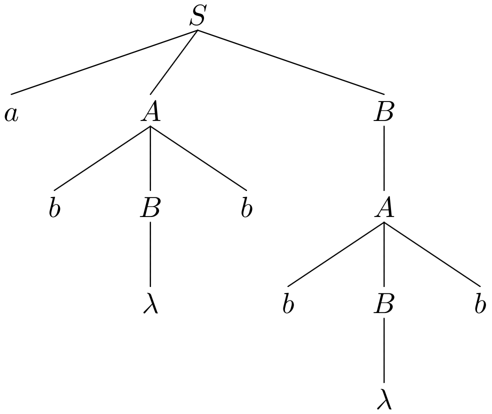
$$
\begin{aligned}
S &\to aAB,\\
A &\to bBb,\\
B &\to A|\lambda,
\end{aligned}
$$

La cadena $abBbB$ es una forma sentencial de G y es el producto del siguiente árbol de derivación parcial de G.



Ejemplo árbol de derivación II

La cadena $abbbb$ es una sentencia de $L(G)$ y es el producto del siguiente árbol de derivación de G.



$w \in L(G)$ ssi existe un árbol de derivación de G con producto w I

Teorema 9

Sea $G = (V, T, S, P)$ una gramática libre de contexto. $w \in L(G)$ si y sólo si existe un árbol de derivación de G con producto w.

Teorema 9

Sea $G = (V, T, S, P)$ una gramática libre de contexto. $w \in L(G)$ si y sólo si existe un árbol de derivación de G con producto w.

Demostración: Por inducción sobre el número de pasos en la derivación $\stackrel{i}{\Rightarrow}$, pero lo haremos de manera más general demostraremos que w es una forma sentencial de $L(G)$ si y sólo si w es el producto de un árbol de derivación parcial de G.

Teorema 9

Sea $G = (V, T, S, P)$ una gramática libre de contexto. $w \in L(G)$ si y sólo si existe un árbol de derivación de G con producto w.

Demostración: Por inducción sobre el número de pasos en la derivación $\stackrel{i}{\Rightarrow}$, pero lo haremos de manera más general demostraremos que w es una forma sentencial de $L(G)$ si y sólo si w es el producto de un árbol de derivación parcial de G.

HI. $S \stackrel{n}{\Rightarrow} u$ si y sólo si u es el producto de un árbol de derivación parcial de G.

$w \in L(G)$ ssi existe un árbol de derivación de G con producto w II

$i = 1.$ $S \overset{1}{\Rightarrow} u$ entonces debe existir una producción de la forma $S \to u$ si y sólo si de acuerdo a la definición 7 (3) hay un árbol de derivación con vértice S cuyos hijos son cada uno de los símbolos de la cadena u.

$w \in L(G)$ ssi existe un árbol de derivación de G con producto w II

$i = 1.$ $S \overset{1}{\Rightarrow} u$ entonces debe existir una producción de la forma $S \rightarrow u$ si y sólo si de acuerdo a la definición 7 (3) hay un árbol de derivación con vértice S cuyos hijos son cada uno de los símbolos de la cadena u.

$i = n + 1.$ Asuma por HI que

$$S \overset{n}{\Rightarrow} u = xAy; x, y \in (V \cup T)^*; A \in V$$

ssi existe un árbol de derivación parcial de G con producto xAy.

$w \in L(G)$ ssi existe un árbol de derivación de G con producto w II

$i = 1.$ $S \overset{1}{\Rightarrow} u$ entonces debe existir una producción de la forma $S \rightarrow u$ si y sólo si de acuerdo a la definición 7 (3) hay un árbol de derivación con vértice S cuyos hijos son cada uno de los símbolos de la cadena u.

$i = n + 1.$ Asuma por HI que

$$S \overset{n}{\Rightarrow} u = xAy; x, y \in (V \cup T)^*; A \in V$$

ssi existe un árbol de derivación parcial de G con producto xAy. Podemos hacer una derivación más, es decir, si $A \rightarrow a_1 a_2 \cdots a_m$, entonces

$$xAy \Rightarrow x a_1 a_2 \cdots a_m y = w; a_i \in V \cup T.$$

$w \in L(G)$ ssi existe un árbol de derivación de G con producto w II

$i = 1.$ $S \overset{1}{\Rightarrow} u$ entonces debe existir una producción de la forma $S \to u$ si y sólo si de acuerdo a la definición 7 (3) hay un árbol de derivación con vértice S cuyos hijos son cada uno de los símbolos de la cadena u.

$i = n + 1.$ Asuma por HI que

$$S \overset{n}{\Rightarrow} u = xAy; x, y \in (V \cup T)^*; A \in V$$

ssi existe un árbol de derivación parcial de G con producto xAy. Podemos hacer una derivación más, es decir, si $A \to a_1a_2 \cdots a_m$, entonces

$$xAy \Rightarrow xa_1a_2 \cdots a_my = w; a_i \in V \cup T.$$

Podemos expandir el vértice etiquetado A, por la definición 7 (3), del árbol de derivación parcial que tiene como producto xAy para obtener un nuevo árbol de derivación parcial con producto $xa_1a_2 \cdots a_my$.

$w \in L(G)$ ssi existe un árbol de derivación de G con producto w III

Ya que un árbol de derivación también es un árbol de derivación parcial cuyas hojas son terminales, se sigue que toda sentencia en $L(G)$ es el producto de un árbol de derivación de G y que el producto de todo árbol de derivación está en $L(G)$.

Ejercicios

1. Encuentre gramáticas libres de contexto para los siguientes lenguajes:
    1. $L = \{a^n b^n : n \text{ es par}\}$,
    2. $L = \{a^n b^n : n \text{ es impar}\}$,
    3. $L = \{a^n b^n : n \text{ es múltiplo de tres}\}$,
    4. $L = \{a^n b^m : n \leq m + 3\}$,
    5. $L = \{a^n b^m : n = m - 1\}$.
2. Demuestre que las gramáticas que propuso en el ejercicio anterior generan los respectivos lenguajes.
3. Encuentre una gramática libre de contexto for $\Sigma = \{a, b\}$ para el lenguaje
$$L = \left\{a^n w w^R b^n : w \in \Sigma^*, n \geq 1\right\}.$$
4. Sea $L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$, demuestre que:
    1. L^2 es libre de contexto.
    2. L^k es libre de contexto para todo $k > 1$.